

POLINOMI

Poznamo že:

a.) konstantno funkcijo ali polinom ničte stopnje

$$f(x) = a_0 \quad (\text{primeri: } f(x) = 4, f(x) = -2 \dots)$$

b.) linearno funkcijo ali polinom prve stopnje

$$f(x) = a_1 \cdot x + a_0 \quad (\text{primeri: } f(x) = 2 \cdot x + 1, f(x) = -3 \cdot x + 2 \dots)$$

c.) kvadratno funkcijo ali polinom druge stopnje

$$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (\text{primer: } f(x) = x^2 + 4x + 4 \dots)$$

I. Splošna oblika polinoma:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

a_0 prosti člen

a_n vodilni koeficient

n stopnja polinoma

Realna števila $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ so koeficienti polinoma.

PRIMERA:

1. Polinomoma določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen.

a.) $p(x) = 3 \cdot x^4 - 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 6$

stopnja: 4

vodilni koeficient: 3

vodilni člen: $3 \cdot x^4$

prosti člen: -6

b.) $p(x) = 2 \cdot x - 4 \cdot x^6$

stopnja: 6

vodilni koeficient: -4

vodilni člen: $-4 \cdot x^6$

prosti člen: 0

2. Zapiši polinom tretje stopnje, če velja $p(0)=1$, $p(1)=0$, $p(2)=-3$ in $p(-1)=6$.

Polinom tretje stopnje ima obliko: $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$p(0)=1$, to pomeni da je $x=0$ in $p(x)=1 \rightarrow$ sedaj to vstavimo v zgornjo enačbo
in dobimo

$$1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$$

$1 = d$

$p(1)=0$, to pomeni da je $x=1$ in $p(x)=0 \rightarrow$ sedaj to vstavimo v zgornjo enačbo
in dobimo

$$0 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$$

$$0 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d$$

$0 = a + b + c + d$

$p(2) = -3$, to pomeni da je $x=2$ in $p(x)=-3 \rightarrow$ sedaj to vstavimo v zgornjo enačbo
in dobimo

$$-3 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$$

$$-3 = a \cdot 8 + b \cdot 4 + c \cdot 2 + d$$

$-3 = 8a + 4b + 2c + d$

$p(-1)=6$, to pomeni da je $x=-1$ in $p(x)=6 \rightarrow$ sedaj to vstavimo v zgornjo enačbo

$$6 = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d$$

$$6 = a \cdot (-1) + b \cdot 1 + c \cdot (-1) + d$$

$$6 = -a + b - c + d$$

$d = 1$ (najprej bomo v ostale tri vstavili, da je $d = 1$)

$$a + b + c + d = 0$$

$$8a + 4b + 2c + d = -3$$

$$-a + b - c + d = 6$$

Tako dobimo:

$$a + b + c + 1 = 0$$

$$8a + 4b + 2c + 1 = -3$$

$$-a + b - c + 1 = 6$$

$$a + b + c = -1$$

$$8a + 4b + 2c = -4$$

$$-a + b - c = 5$$

Združimo prvo in zadnjo enačbo skupaj in dobimo:

$$+a + b + c = -1$$

$$\underline{-a + b - c = 5}$$

+

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

Združimo drugo in zadnjo skupaj in vstavimo namesto b število 2:

$$+8a + 4b + 2c = -4$$

$$\underline{-a + b - c = 5}$$

$$+8a + 8 + 2c = -4$$

$$\underline{-a + 2 - c = 5}$$

$$+8a + 2c = -12$$

$$\underline{-a - c = 3} \quad / \cdot 8$$

$$+8a + 2c = -12$$

$$\underline{-8a - 8c = 24}$$

+

$$-6c = 12$$

$$c = -2$$

$$+a + b + c = -1$$

Vstavimo $b=2$ in $c=-2$ in dobimo:

$$+a + 2 + (-2) = -1$$

$$a = -1$$

Sedaj imamo vse neznanke:

$$a = -1$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

$$d = 1$$

Vstavimo v polinom tretje stopnje:

$$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$p(x) = -1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 1$$

$$p(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

3. Dani so polinomi:

$$p(x) = x^4 + 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5x + 6$$

$$q(x) = 2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - x - 1$$

Izračunaj

$$2 \cdot p(x) - q(x) =$$

$$2 \cdot (x^4 + 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5x + 6) - (2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - x - 1) =$$

$$2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 10x + 12 - 2x^4 + 2x^2 + x + 1 =$$

$$6x^3 - 2x^2 + 11x + 13$$

4. Določi taka števila A, B in C, da bo:

$$2x^2 + 2x = (Ax + B)(x - 1) + Cx + 2B - 1$$

$$2x^2 + 2x = (Ax + B)(x - 1) + Cx + 2B - 1$$

$$2x^2 + 2x = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx + 2B - 1$$

$$2x^2 + 2x = Ax^2 - Ax + Bx + Cx - B + 2B - 1$$

$$2x^2 = Ax^2$$

$$A = 2$$

$$2x = -Ax + Bx + Cx$$

$$2x = x(-A + B + C)$$

$$2 = -A + B + C$$

$$0 = -B + 2B - 1$$

$$0 = B - 1$$

$$B = 1$$

V srednjo enačbo vstavimo, da je $A=2$ in $B=1$ in dobimo C :

$$2 = -A + B + C$$

$$2 = -2 + 1 + C$$

$$C = 3$$

5. S Hornerjevim algoritmom določi ničle polinoma:

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7 \cdot x^2 + x + 6$$

	1	-1	-7	1	6
3		3	6	-3	-6
	1	2	-1	-2	<u>0</u>

$$x_1 = 3$$

Iz tabele pa dobimo novo enačbo:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Spet uporabimo Hornerjev algoritem:

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	<u>0</u>

$$x_2 = 1$$

Iz tabele dobimo novo enačbo:

$$p(x) = x^2 + 3x + 2$$

Ker je to kvadratna enačba lahko ostali dve ničli poiščemo z Vietovim pravilom.

$$p(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$p(x) = (x + 2)(x + 1)$$



$$x + 2 = 0$$

$$x_3 = -2$$



$$x + 1 = 0$$

$$x_4 = -1$$

6. Nariši graf polinoma:

$$p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 4x + 4$$

a.) najprej moramo izračunati ničle polinoma

	2	5	-4	-11	4	4
1		2	7	3	-8	-4
	2	7	3	-8	-4	<u>0</u>

$$x_1 = 1$$

$$p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4$$

	2	7	3	-8	-4
1		2	9	12	4
	2	9	12	4	<u>0</u>

$$x_2 = 1$$

$$p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

	2	9	12	4
-2		-4	-10	-4
	2	5	2	<u>0</u>

$$x_3 = -2$$

$$p(x) = 2x^2 + 5x + 2$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$x_{4,5} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$x_4 = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_5 = \frac{-5 - 3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

b.) nato izračunamo začetno vrednost

$$p(0) = 4 \quad A(0,4)$$

c.) in graf narišemo

